## Посилання

[1]

https://phet.colorado.edu/en/simulations/my-solar-system

Чудова збірка інтерактивних імітацій із всіх розділів фізики і не тільки її. Небесна механіка наразі представлена лише однією моделлю, яка носить скоріше якісний, а не кількісний характер, наприклад, там неможливо точно встановити обчислену швидкість планети.

[2]

<https://stellarium.org/>

Безкоштовний астрономічний симулятор, який дозволяє користувачам спостерігати нічне небо з будь-якої точки на Землі та в будь-який час. Містить функції для моделювання руху планет і зірок. Домашній планетарій.

[3]

<https://celestiaproject.space/>

3D

Це вільне програмне забезпечення для тривимірного моделювання та візуалізації планет Сонячної системи і зірок. Celestia дозволяє спостерігати планети, зірки, галактики та інші небесні тіла в реальному часі.

[4]

<https://rebound.readthedocs.io/en/latest/>

Pyton or C++

Це пакет для чисельного моделювання динаміки небесних тіл. Він використовується для моделювання руху планет, астероїдів, комет і зірок. Rebound підтримує різноманітні чисельні методи для інтеграції орбіт. Обчислює дуже точно, але не робить це в реальному часі.

[5]

"The Mathematical Principles of Natural Philosophy", Encyclopædia Britannica, London, archived from the original on 2 May 2015, retrieved 13 February 2015

[6]

Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B.; Sands, Matthew (2005) [1970]. The Feynman Lectures on Physics: The Definitive and Extended Edition (2nd ed.). Addison Wesley. [ISBN](https://en.wikipedia.org/wiki/ISBN_(identifier)) [0-8053-9045-6](https://en.wikipedia.org/wiki/Special:BookSources/0-8053-9045-6).

[7]

<https://tss.co.ua/planets/>

        <div id="footer">

            <textarea id="dataArea">

    {

        imurl: './assets/task1.png',

        title: 'Зірка з планетою на круговій орбіті',

        init:

            `[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"lightblue"}]`,

        cond:

            `В системі «зірка-планета» планета знаходиться на певній відстані від зірки.

            Надайте планеті таку швидкість, щоб вона почала рухатись навколо зірки по круговій орбіті.`,

        help:

            `І зірка, і планета будуть обертатися навкруги центра мас системи.

            <p>Якщо маса планети є малою відносно маси зірки, центр мас і центр зірки майже співпадають, і можна казати про обертання планети навкруги зірки.

            <p>Рух по колу потребує щоб відцентрова сила врівноважувалася силою тяжіння, тобто

            <p>\\( {mv^2 \\over r} = {G Mm \\over r^2} \\)

            <p>З цієї формули можна вирахувати необхідну швидкість.`,

        solv:

            `Виводимо швидкість із попередньої формули

            <p>\\( v=\\sqrt{GM \\over r} \\)

            <p>За цією фркмулою і з параметрів системи обчислюємо швидкість планети: \\(v = 5\\).

            <p>Встановлюємо для планети: vx = 0, vy = 5.`,

        final:

            `[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"}]`,

    },

    {

        imurl: './assets/task2.png',

        title: 'Зірка з планетою на еліптичній орбіті',

        init:

            `[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"}]`,

        cond:

            `Є система «зірка-планета» і планета знаходиться на заданій відстані r від зірки.

            Надайте планеті таку швидкість, щоб вона почала рухатись навколо зірки по еліпсу з великою віссю d.`,

        help:

            `Найпростішим вирішення буде, якщо в початковому стані планета знаходиться в афелію чи в перигелію своєї орбіти.

            <p>Спершу визначимо, де саме. Якщо r < d/2, це перигелій, інакше це афелій.

            <p>За законом тяжіння Ньютона потенційна енергія планети масою m на відстані від зірки r дорівнює

            \\( -GMm \\over r \\).

            <p>За законом збереження енергії сума кінетичної і потенційної енергії планети в афелії і в перигелії однакові.

            <p>\\( {mv\_a^2 \\over 2}-{GMm \\over r\_a} = {mv\_p^2 \\over 2}-{GMm \\over r\_p}  \\)

            <p>З цієї формули и закону збереження кутового моменту можна отримати початкову швидкість планети.

            `,

        solv:

            `За законом збереження кутового моменту \\( mv\_a r\_a=mv\_p r\_p  \\),

            <p>тобто \\( v\_p = {r\_a \\over r\_p}v\_a \\)

            <p>Знаходимо \\(v\_a\\) з огляду на те, що \\(r\_p=d-r\_a \\)

            <p>                           \\( v\_a=\\sqrt{ 2GMr\_p \\over dr\_a  }  \\)

            <p>Так само виводиться і \\( v\_p=\\sqrt{ 2GMr\_a \\over dr\_p  }  \\)

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени \\( M = 10^4;  r\_a=300;  d=400.\\)

            <p>В результаті розрахунку   \\( v\_a≈ 3.162 \\)`,

        final:

            `[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":10,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":3.162,"color":"lightblue"}]`,

    },

    {

        imurl: './assets/task3.png',

        title: 'Подвійна зірка',

        init:

            `[{"name":"Sun1","m":10000,"r":20,"x":-300,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Sun2","m":10000,"r":20,"x": 300,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"coral"}]`,

        cond:

            `В системі подвійної зірки обидві зірки мають однакові маси m, відстань між їх центрами – r.

            Обрати таку швидкість окремих зірок, яка забезпечить існування системи подвійної зірки.`,

        help:

            `Подвійна зірка буде існувати, коли зірки будуть обертатися навколо центра мас,

            а не розлетяться на нескінченну відстань і не впадуть одна на одну.

            <p>В будь-який момент часу система має потенційну енергію тяжіння \\( -{Gm^2}\\over r \\)

            і кінетичну енергію \\( mv^2 \\).

            <p>Надали зірки можуть зближуватися, розходитися або зберігати початкову відстань, якщо траєкторія кожної зірки будуть колами.

            В цьому випадку доцентрова сила \\(mv^2 \\over r/2 \\) є силою тяжіння до протилежної зірки \\( Gm^2 \\over r^2 \\).`,

        solv:

            `Прирівняємо силу тяжіння до доцентрової сили

            \\( {mv^2 \\over r/2}={Gm^2 \\over r^2}  \\)

            і знайдемо початкову швидкість.

            <p>\\( v= √{Gm \\over 2r} \\)

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени \\( m=10000;  r=600;\\).

            <p>В результаті розрахунку \\( v ≈ 2.888 \\)`,

        final:

            `[{"name":"Sun1","m":10000,"r":20,"x":-300,"y":0,"vx":0,"vy":-2.888,"color":"yellow"},

            {"name":"Sun2","m":10000,"r":20,"x": 300,"y":0,"vx":0,"vy":2.888,"color":"coral"}]`,

    },

    {

        imurl: './assets/task4.png',

        title: 'Зірка - планета - супутник',

        init:

            `[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":10,"r":5,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"lightblue"},

            {"name":"Moon","m":0.1,"r":2,"x":410,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"white"}]` ,

        cond:

            `Створити систему зірка-планета-супутник. Планета обертається навкруги зірки, а супутник - навкруги планети.

            Маса зірки набагато більша за масу планети, а маса планети набагато більша за масу супутника, \\( M ≫ m\_p ≫ m\_s \\).`,

        help:

            `Задане співвідношення мас дозволяє вірішувати задача у два етапи.

            <p>Спочатку змусимо планету обертатися навкруги зірки без супутника.

            Швидкість планети вирахуємо за формулою \\( v=\\sqrt{GM \\over r\_p} \\) , тут \\( r\_p \\) - відстань від планети до зірки.

            <p>Потім, дамо планеті супутник, який буде кружляти навкруги планети, як планета кружляє навкруги зірки.`,

        solv:

            `При визначенні швидкості супутника врахуємо, що планета, на відміну від зірки, рухається.

            <p> \\( v\_s=\\sqrt{{G m\_p}\\over r\_s} + v\_p  \\)

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени \\( M=10000;   m\_p=100;   m\_s=0.1;  r\_p=400;  r\_s=10\\).

            <p>В результаті розрахунку \\( v\_p=5;   v\_s=1+5=6 \\).`,

        final:

            `[{"name":"Sun","m":10000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":10,"r":5,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":5,"color":"lightblue"},

            {"name":"Moon","m":0.1,"r":2,"x":410,"y":0,"vx":0,"vy":6,"color":"white"}]`

    },

    {

        imurl: './assets/task5.png',

        title: 'Перша космічна швидкість',

        init:

            `[{"name":"Earth","m":10000,"r":300,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"green"},

            {"name":"ball","m":0.001,"r":5,"x":0,"y":320,"vx":5,"vy":0,"color":"coral"}]`,

        cond:

            `Задана планета і висота над поверхнею планети.

            З цієї висоти робить горизонтальний постріл гармата, яку зобразив Ньютон в книзі «Трактат про систему світу».

            <p>Оберіть швидкість снаряду, яка забезпечить його політ по колу навкруги планети.

            Роль снаряду буде виконувати планета-супутник, яку розташуємо на висоті гори, саму гору малювати не будемо.`,

        help:

            `Маса планети - M, радіус планети - r, висота над поверхнею - h, швидкість планети-снаряду – v.

            <p>Для польоту по колу радіусом R = r + h формула шидкості виведена в завданні 2.

            `,

        solv:

            `<p> \\( v=\\sqrt{GM/R} \\)

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени \\( M= 10^4;   r=300;  h=20 \\).

            <p>В результаті розрахунку \\( v=5.590 \\).`,

        final:

            `[{"name":"Earth","m":10000,"r":300,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"green"},

            {"name":"ball","m":0.001,"r":5,"x":0,"y":320,"vx":5.590,"vy":0,"color":"coral"}]`,

    },

    {

        imurl: './assets/task6.png',

        title: 'Долетімо до самого Сонця',

        init:

            `[{"name":"Sun","m":1000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":0.01,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.581,"color":"lightblue"}]`,

        cond:

            `Планета обертається навкруги центральної зірки по круговій орбіті.

            Запустити ракету з планети так, щоб вона наблизилась до центра зірки на два її радіуса

            і після того стала обертатися навкруги зірки. Визначити початкову швидкість ракети.`,

        help:

            `Нехай R – радіус зірки, M – її маса, S – відстань від планети до зірки.

            Тоді ракета має рухатися по еліпсу з великою віссю \\( d=r\_a+r\_p \\) ,  де \\( r\_a=S,   r\_p=2R  \\)`,

        solv:

            `Спершу треба з'ясувати, в афелії чи перигелії знаходиться планета підчас старту ракети.

            <p>Якщо S > 2R, це афелій.

            <p>\\( v\_a=\\sqrt{{2GMr\_p} \\over d r\_a } + v\_{планети}\\)

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени \\( M= 1000;   S=400;  R=25 \\).

            <p>В результаті розрахунку \\( v=-0.836 \\).`,

        final:

            `{"planets":[{"name":"Earth","m":0.01,"r":8,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.581,"color":"lightblue"},

            {"name":"Sun","m":1000,"r":25,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"}],

            "starters":[{"kind":1,"velo":-0.836,"param2":0,"startStep":0,"planetName":"Earth"}]}`,

    },

    {

        imurl: './assets/task7.png',

        title: 'До орбіти Марсу',

        init:

            `[{"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"},

            {"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

            {"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.5811,"color":"orange"}]`,

        cond:

            `Дві планети (умовно Земля і Марс) обертаються навкруги центральної зірки (умовно Сонця) по круговим орбітам.

            Запустити ракету з Землі так, щоб вона досягла орбіти Марса.

            Визначити мінімально необхідну для того швидкість ракети.`,

        help:

            `Згідно з першим законом Кеплера орбіта ракети має бути еліпсом, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.

            <p>Перигелійна відстань орбіти \\( r\_p \\) це відстань від зірки до Землі,

            афелійна відстань  \\( r\_a \\) – відстань від зірки до Марса.

            <p>Будемо зневажати тяжінням Землі, яке діє на ракету, тому що при старті з земної поверхні

            прискорення від Землі становить 0.001/7² ≈ 0.00002, а прискорення від Сонця 1000/300² ≈ 0.01, тобто e 500 разів більше.`,

        solv:

            `Скористаємося вже відомою формулою для розрахунку початкової, тобто перигелійної, швидкості ракети.

            <p>\\( v\_p=\\sqrt{\\frac{2GMr\_a}{(r\_a+r\_p)r\_p}} \\)

            <p>Щоб визначити швидкість ракети відносно Сонця, віднімемо від неї швидкість Землі.

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени \\( M = 1000; r\_p = 300; r\_a = 400 \\).

            <p>В результаті розрахунку \\( v\_p= 1.952,   v\_{rocket}= v\_p-v\_{Earth} = 0.126  \\).`,

        final:

            `{"planets":[{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.581,"color":"orange"},

            {"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

            {"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"}],

            "starters":[{"kind":1,"velo":0.126,"count":0,"size":0,"startStep":0,"planetName":"Earth"}]}`,

    },

    {

        imurl: './assets/task8.png',

        title: 'Подорож на Марс',

        init:

            `{"planets":[{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.5811388300841898,"color":"orange"},

            {"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.8257418583505538,"color":"lightblue"},

            {"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"}],

            "starters":[]}`,

        cond:

            `Щоб висадитися на Марс, ракета повинна досягти його орбіти в той самий час,

            коли Марс опиниться в точці досягнення. Тому треба обрати не лише швидкість ракети, а і час її запуску.`,

        help:

            `Завдяки круговій орбіті Марса, період його обертання можна визначити, поділивши довжину орбіти на швидкість планети.

            \\( {2πr\_M} \\over v\_M \\)

            <p> Третій закон Кеплера говорить, що квадрати періодів обертання відносяться,

            як куби великих осей орбіт, тому період обертання ракети  \\( T\_r = T\_M \\sqrt{   {{r\_r}^3} \\over {{r\_M}^3}   } \\)

            і ракета досягне орбіти Марса за половину свого періоду  \\( T\_r/2 \\).

            <p> Кутова швидкість марса \\( ω\_M=2π/T\_M \\)  , тому за цей час Марс просунеться на кут

            \\( {ω\_M T\_r} \\over 2 \\) = \\( π {{T\_r} \\over {T\_M}}  \\).

            <p> До зустрічі з ракетою йому не вистачить кута \\( φ=π-π {T\_r \\over T\_M} \\)

            <p>Тому запускати ракету с Землі варто, коли у своєму русі Марс

            буде випереджати Землю на кут φ, або, що те ж саме, Земля буде попереду Марса на кут \\( 2π - φ \\).`,

        solv:

            `Кутова швидкість Землі відносно Марса \\( ω = ω\_E - ω\_M = 2π(1/T\_E -  1/T\_M ) \\)

            <p>Виходячи з початкового стану системи, потрібне випередження виникне за час

            \\( t = {{2π-φ} \\over {ω}}\\)

            <p>Дані для розрахунку беремо з початкової сцени.

            <p>В результаті розрахунку \\( v\_{rocket} = 0.126; t = 2678  \\).`,

        final:

            `{"planets":[{"name":"Mars","m":0.001,"r":6,"x":400,"y":0,"vx":0,"vy":1.581,"color":"orange"},

            {"name":"Earth","m":0.001,"r":7,"x":300,"y":0,"vx":0,"vy":1.826,"color":"lightblue"},

            {"name":"Sun","m":1000,"r":20,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"yellow"}],

            "starters":[{"kind":1,"velo":0.126,"count":0,"size":0,"startStep":2678,"planetName":"Earth"}]}`,

    },

    {

        imurl: 'https://esu.com.ua/images/article\_images/A/Andromedi%20tumannisty.jpg',

        title: 'Туманність',

        init:

            `{"planets":[{"name":"Noname1","m":50,"r":10,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"white"}],

            "starters":[{"kind":2,"count":1000,"size":400,"velo":0, "startStep":100, "distr": "polar", "planetName":"Noname1"}]}`,

        cond:

            `Створити туманність, яка під впливом тяжіння перетвориться в планетну систему,

            в якій зосередиться не менше, ніж 80% первинної маси туманності.`,

        help:

            `Може допомогти наближення фактору обертання до 0.5.`,

        solv:

            `Kω = 0.4`,

        final:

            `{"planets":[{"name":"Noname1","m":50,"r":10,"x":0,"y":0,"vx":0,"vy":0,"color":"white"}],

            "starters":[{"kind":2,"count":1000,"size":400,"velo":0.7, "startStep":100, "distr": "polar", "planetName":"Noname1"}]}  `,

    },

            </textarea>

        </div>